OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER, 1899. Nr. 3.

Om Iagttagelseslærens Halvinvarianter.

Af

T. N. Thiele.

(Meddelt i Mødet den 10. Marts 1899.)

Jeg har i flere Skrifter om Iagttagelseslæren vist, at man vinder mange og store Fordele ved at udtrykke Fejllovene ved visse symmetriske Funktioner — Halvinvarianterne — af de gentagne Iagttagelser. Men jeg har ikke kunnet undgaa at bemærke, at min Brug af dette Middel ogsaa havde sine Skyggesider.

Navnlig var den Definition, jeg kunde give for Halvinvarianterne, mangelfuld, fordi den baade var middelbar og indviklet; middelbar, fordi den krævede et andet System af symmetriske Funktioner, Potenssummerne indskudt som Mellemled mellem Iagttagelserne og Halvinvarianterne, og indviklet, fordi den kun i sin Form af rekurrente Ligninger var simpel nok til at kunne huskes og bruges i almindelige Beviser.

En ikke mindre Mangel var det, at man savnede en Overgang mellem Halvinvarianterne og Fejllovsfunktionerne, der maa erkendes at være det mest nærliggende og i visse Tilfælde fordelagtigste Udtryk for Fejllovene, ligesom det ogsaa tidligere er blevet anvendt næsten saa udelukkende, som om Fejllovsfunktionen var det eneste mulige mathematiske Udtryk for Fejllove.

Paa disse Mangler kan jeg nu raade Bod. Afhængigheden mellem Halvinvarianterne μ_r og Potenssummerne s_r kan skrives i den med Hensyn til det variable Tal z identiske Ligning

$$s_0\, e^{\frac{\mu_1}{\underline{|1}} z + \frac{\mu_2}{\underline{|2}} z^2 + \frac{\mu_3}{\underline{|3}} z^3 + \dots} = s_0 + \frac{s_1}{\underline{|1}} z + \frac{s_2}{\underline{|2}} z^2 + \frac{s_3}{\underline{|3}} z^3 + \dots \qquad (1)$$

saa at μ-Rækken altsaa er den tilsvarende s-Rækkes Logarithme; i denne Identitet kan højre Side opløses i en Sum, hvori hvert Led kun afhænger af en af de gentagne Iagttagelser $o_1, o_2 \dots o_{s_0}$, følgelig haves

$$s_0\, e^{\frac{\mu_1}{\underline{|1}} z + \frac{\mu_2}{\underline{|2}} z^2 + \frac{\mu_3}{\underline{|3}} z^3 + \dots} = e^{o_1 z} + e^{o_2 z} + \dots e^{o_{s_0} z}, \qquad (2)$$

som egner sig fortrinligt til at anvendes som Definition for Halvinvarianterne μ_r.

Identiteten (1) afgiver efter de ubekendte Koefficienters Methode mine ældre Ligningssystemer. Sammenligner man direkte Koefficienterne til z^i, fremkomme de explicite Ligninger for s_i

$$\frac{1}{s_0} \frac{s_i}{\underline{|i}} = \sum_{r=1}^{r=i} \sum \frac{1}{\underline{|a}} \left(\frac{\mu_\alpha}{\underline{|\alpha}} \right)^a \frac{1}{\underline{|b}} \left(\frac{\mu_\beta}{\underline{|\beta}} \right)^b \cdots \frac{1}{\underline{|d}} \left(\frac{\mu_\delta}{\underline{|\delta}} \right)^d,$$

$$\text{hvor } i = a\alpha + b\beta + \dots + d\delta$$
$$r = a + b + \dots + d.$$

Tager man først Logarithmen til hver Side af Identiteten (1), fremkomme de explicite Ligninger for μ_i.

$$\frac{\mu_i}{\underline{|i}} = \sum_{r=1}^{r=i} (-1)^{r-1}\, \underline{|r-1} \sum \frac{1}{\underline{|a}} \left(\frac{s_\alpha}{s_0\, \underline{|\alpha}} \right)^a \cdot \frac{1}{\underline{|b}} \left(\frac{s_\beta}{s_0\, \underline{|\beta}} \right)^b \cdots \frac{1}{\underline{|d}} \left(\frac{s_\delta}{s_0\, \underline{|\delta}} \right)^d,$$

$$i = a\alpha + b\beta + \dots + d\delta$$
$$r = a + b + \dots + d.$$

Differentierer man endelig Identiteten (1) med Hensyn til z, førend man sammenligner Koefficienterne til z^i, da fremkommer af

$$\left(\frac{s_0}{\underline{|0}}+\frac{s_1}{\underline{|1}}z+\ldots\right)\left(\frac{\mu_1}{\underline{|0}}+\frac{\mu_2}{\underline{|1}}z+\ldots\right)=\frac{s_1}{\underline{|0}}+\frac{s_2}{\underline{|1}}z+\ldots$$

det rekurrente Ligningssystem

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0\mu_1 \\ s_2 &= s_1\mu_1+s_0\mu_2 \\ s_3 &= s_2\mu_1+2s_1\mu_2+s_0\mu_3 \end{aligned}$$

o. s. v.,

hvis forholdsvise Simpelhed og Analogi med Binomialformlerne tillod mig i min tidligere Mangel paa bedre at anvende det til Definition paa Halvinvarianterne.

Da baade s_r og μ_r ere Konstanter i en Fejllov, ligger det nær at benytte z's fuldstændig arbitrære Natur til lejlighedsvis at opfatte dette Tegn som et Operationssymbol; herved er der kun den Betænkelighed, at man ikke paa Forhaand kan sikre sig Konvergensen af uendelige Rækker udviklede efter et Symbols Potenser. Men i øvrigt anbefaler Differentiationssymbolet D sig her til Operationer med Fejllove i Henhold til Definitionen (2), fordi som bekendt $e^{aD} * f(x) = f(x+a)$; kun vil det, for ikke at frembringe Summer, men Differenser mellem x og de iagttagne Tal o_i, være praktisk at indsætte ikke $z = D$, men $z = -D$ i vor Definition.

De i Henhold til denne Ligning (2) identiske Symboler ville vi navnlig anvende til Operationer paa Fejllovsfunktioner, for at søge saadanne afledede den ene af den anden, og som første Exempel herpaa vælge vi naturligvis den almindelig typiske eller exponentielle Fejllov $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{n}\right)^2}$ med Middeltallet m og Middelfejlen n. Da denne Fejllov er kontinuert, bør vi ogsaa om Gentagelsesværdierne o_i i (2) forudsætte, at deres Antal s_0 er uendelig stort og at Hyppigheden af en Gentagelsesværdi imellem o og $o+do$ er $\Phi(o)\,do$, hvor ogsaa Fejllovsfunktionen $\Phi(o)$ maa forudsættes at være kontinuert.

Saaledes afgiver da (2) den symbolske Ligning

$$e^{-\frac{\mu_1}{|1}D+\frac{\mu_2}{|2}D^2-\frac{\mu_3}{|3}D^3+\dots} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{n}\right)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(o)\, e^{-oD} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{n}\right)^2} do$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(o)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m-o}{n}\right)^2} do.$$

Vi forudsætte yderligere, at $\Phi(o) = \Phi(x-m+(o+m-x))$ kan udvikles efter Potenser af $o+m-x$ efter Taylors Række. Ved at indsætte denne i Ligningens højre Side, af hvilken Symbolerne foreløbigt vare forsvundne, indføre vi derved paany Differentiationssymbolet D, der er identisk med det tidligere, fordi m er konstant, altsaa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(o)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m-o}{n}\right)^2} do$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Phi(x-m) + \frac{o+m-x}{|1} D * \Phi(x-m) + \right.$$

$$\left. + \frac{(o+m-x)^2}{|2} D^2 * \Phi(x-m) + \dots \right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m-o}{n}\right)^2} d(o+m-x)$$

$$= n\sqrt{2\pi}\left(\Phi(x-m) + \frac{1\cdot n^2}{|2} D^2 * \Phi(x-m) + \frac{1\cdot 3\cdot n^4}{|4} D^4 * \Phi(x-m) + \dots \right)$$

$$= n\sqrt{2\pi}\, e^{-mD+\frac{n^2}{2}D^2} * \Phi(x).$$

altsaa

$$e^{-\frac{\mu_1}{|1}D+\frac{\mu_2}{|2}D^2-\frac{\mu_3}{|3}D^3+\dots} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{n}\right)^2} = n\sqrt{2\pi}\, e^{-mD+\frac{n^2}{2}D^2} * \Phi(x). \quad (3)$$

Der er altsaa Mulighed for at faa saa almindelig en Fejllov som den, der er given ved Halvinvarianterne μ_r, symbolsk afledet af den almindelige typiske. Disponere vi specielt saaledes over denne sidstes Konstanter, at $m = \mu_1$, $n^2 = \mu_2$, at altsaa hverken Middeltal eller Middelfejl forandres, haves

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2}} e^{-\frac{\mu_3}{\underline{|3}} D^3 + \frac{\mu_4}{\underline{|4}} D^4 + \ldots} * e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\mu_2}} \tag{4}$$

Herefter skulde altsaa en hvilkensomhelst Fejllov kunne afledes af enhver anden med samme Middeltal og Middelfejl ved en Operation

$$\Phi^1(x) = e^{\frac{\mu_3 - \mu^1_3}{\underline{|3}} D^3 - \frac{\mu_4 - \mu^1_4}{\underline{|4}} D^4 + \ldots} * \Phi(x), \tag{5}$$

selvfølgelig under den Forudsætning, at $\Phi(x)$ ikke er en saadan Funktion, at nogen af de nødvendige Rækkeudviklinger undlader at være konvergent.

Hvorvidt Afledningerne ogsaa kunne udstrækkes til Forandring af Middeltal og Middelfejl, er det sikrest at undersøge paa Tilfældet typiske Fejllove. Af (3) følger ved $\mu_3 = \mu_4 = \ldots = \mu_r = 0$.

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} e^{(m-\mu_1)D + \frac{1}{2}(\mu_2 - n^2)D^2} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(\mu_2 - n^2)D^2} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\mu_2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

For at bevise denne Sætning maa vi studere Virkningen af Symbolet $e^{\frac{1}{2}bD^2}$. Af en vilkaarlig Funktion $f(y)$ afledes herved

$$e^{\frac{1}{2}bD^2} * f(y) = f(y) + \frac{1}{\underline{|2}} b D^2 * f(y) + \frac{1 \cdot 3}{\underline{|4}} b^2 D^4 * f(y) + \ldots,$$

men da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2r+1} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 0 \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2r} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{2\pi} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2r-1), \quad \text{er}$$

$$e^{\frac{1}{2}bD^2} * f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} \left(f(y) + \frac{u\sqrt{b}\,D * f(y)}{\lfloor 1} + \frac{u^2 b D^2 * f(y)}{\lfloor 2} + \ldots \right) du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} f(y + u\sqrt{b})\, du,$$

dersom Taylors Række er anvendelig paa $f(x)$. Sættes specielt

$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a}}$, er

$$e^{\frac{1}{2}bD^2} * \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a}}}{\sqrt{2\pi a}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{(y+u\sqrt{b})^2}{a}\right)} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(a+b)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a+b}}.$$

For Fejllovsfunktionen er altsaa den ved Symbolet $e^{\frac{1}{2}bD^2}$ bestemte Operation ensbetydende med en Addition af b til Middelfejlens Kvadrat. Dette bestyrker Ligning (6). Dog maa det erindres, at det er væsentligt for typiske Fejllove, at Middelfejlen er reel. Hvis derfor Additionen af b til Middelfejlskvadratet skulde fremkalde et Fortegnskifte, ophører Formlens Gyldighed. Ogsaa Overgangstilfældet, at Middelfejlen kunde være eller blive $= 0$, bør udelukkes. Fejlfrie Iagttagelser have ingen egentlig Fejllov.

De almindeligere Formler (3), (4) og (5) vække ved nærmere Undersøgelse endnu større Betænkeligheder. Thi om de end kunne være nyttige i specielle Tilfælde, kan det let vises, at de ikke altid lede til konvergente Rækker. Man skulde saaledes vel særlig tænke paa at anvende dem til at belyse de enkelte Halvinvarianters Betydning overfor Fejlloven ved at udlede Fejllovsfunktioner for saadanne Fejllove, der kun afveg fra den typiske Form, derved at en af de højere Halvinvarianter var forskellig fra 0. En Fejllov, hvor $\mu_1 = m = 0$, $\mu_2 = n^2 = 1, \ldots$ $\mu_{r-1} = 0$, $\mu_{r+1} = 0 \ldots$, vilde ifølge (4) have Fejllovsfunktionen

$$\Phi_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-1)^r \frac{\mu_r}{\underline{|r}} D^r} * e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2} + (-1)^r \frac{\mu_r}{\underline{|r}} D^r * e^{-\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{\mu_r}{\underline{|r}}\right)^2 D^{2r} * e^{-\frac{1}{2}x^2} + \ldots\right)$$

men denne Række er ikke konvergent, naar $r > 2$, hvad der særlig viser sig, naar man efter Differentiationerne sætter $x = 0$. F. Ex.

$$\Phi_3(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{\mu_3}{6}\right)^2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 + \frac{1}{\underline{|4}}\left(\frac{\mu_3}{6}\right)^4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 - \ldots\right)$$

har $\frac{u_{r+1}}{u_r} = -\frac{\mu_3^2}{36} \cdot \frac{(6r+1)(6r+3)(6r+5)}{(2r+1)(2r+2)} = \infty$ for $r = \infty$

og $\Phi_4(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \frac{1}{\underline{|1}} \frac{\mu_4}{24} \cdot 1 \cdot 3 + \frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{\mu_4}{24}\right)^2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + \ldots\right)$

har $\frac{u_{r+1}}{u_r} = \frac{\mu_4}{24} \cdot \frac{(4r+1)(4r+3)}{r+1} = \infty$ for $r = \infty$.

Det fremgaar heraf, at man ikke frit kan kombinere vilkaarligt ansatte Værdier for $\mu_3, \mu_4, \ldots$ som Halvinvarianter for en brugelig Fejllov.